06/03/20

Livros

1. Dunford, Schwartz, Linear Operators, 1, 2.
2. Poyy, Semigroups of linear ops and applications
3. R. Schraubelt, Lecture Notes, Spectral Theory

Revisão e aprofundamento

Sejam E_1, E_2 esp. normados (EN), $D(A) \subseteq E_1$ é subesp. linear de E_1
$A : D(A) \subseteq E_1 \to E_2$ é operador linear.

domínio de A

Denotamos $N(A) = \{ x \in D(A) : Ax = 0 \}$ o núcleo de A, e
$R(A) = \{ y \in E_2 : \exists x \in D(A)$ t.q. $y = Ax \}$ a imagem de A.

Def 1: A é dito limitado (contínuo) se $\exists C > 0$ t.q. $\|Ax\|_2 \leq C \|x\|_1$.

2) A norma do A

$$\|A\| = \sup \left\{ \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1} : x \neq 0, x \in D(A) \right\}$$
$$= \sup \left\{ \|Ax\|_2 : \|x\|_1 = 1, x \in D(A) \right\}$$

$B(E_1, E_2)$ é conjunto dos ops. lim.
$A : E_1 \to E_2$

Ex 1: $E_1 = D(A) = C^1[0,1]$, $\|x\|_1 = \max\limits_{[0,1]} |x(t)|$

$E_2 = C[0,1]$, $\| \ \|_2 = \| \ \|_1$. Seja $(Ax)(t) = x'(t)$

Mostremos que A é não limitado.

Consideremos $x_n = \operatorname{sen}(\pi n t) \Rightarrow \|x_n\|_1 = 1$ e $Ax_n = \pi n \cos(\pi n t)$

$\Rightarrow \|Ax_n\|_2 = \pi n \Rightarrow \{ \|Ax\|_2 : \|x\|_1 = 1, x \in E_1 \}$

é não lim. $\Rightarrow$ A é não lim.

Def 2: Suponha que $N(A) = \{0\}$ (A é injetor) $\Rightarrow \exists A^{-1}: R(A) \to D(A)$ (inverso algébrico) t.q. $A^{-1}(Ax) = x, \ \forall x \in D(A)$.

Teorema 1 (de Banach): Sejam E_1 e E_2 esp. de Banach (EB), $A: E_1 \to E_2$ t.q. $N(A) = \{0\}$, $R(A) = E_2$ (A é bijetor) $\Rightarrow A^{-1}: E_2 \to E_1$ é limitado.

Operadores fechados

Sejam E_1, E_2 EN

$$E_1 \times E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x \in E_1, \ y \in E_2 \right\}$$

$$\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| = \|x\|_1 + \|y\|_2$$

Def 3: Seja $A: D(A) \subseteq E_1 \to E_2$ linear.

1) O gráfico de A é o conjunto:

$$G(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ Ax \end{pmatrix} : x \in D(A) \right\} \subseteq E_1 \times E_2$$

Obs: $G(A) \not\ni \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}, \ y \neq 0$

2) A é fechado se $G(A) = \overline{G(A)}$ (na norma do $E_1 \times E_2$).

Obs: $G(A) = \overline{G(A)} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x_n \to x \\ Ax_n \to y \end{cases}, \ x_n \in D(A) \text{ implica que } x \in D(A) \text{ e } Ax = y \right]$

De fato, seja $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \overline{G(A)} \Rightarrow \exists\, z_n = \begin{pmatrix} x_n \\ Ax_n \end{pmatrix} \in G(A)$ t.q. $z_n \to z$ ou seja

$\|x - x_n\|_1 + \|y - Ax_n\|_2 \to 0 \Rightarrow x_n \to x$ e $Ax_n \to y$. Agora $G(A) = \overline{G(A)}$ ou $z \in G(A) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in D(A) \\ Ax = y \end{cases}$$

<u>Ex 2</u>: a) $E_1 = E_2 = C[0,1]$,

$$D(A) = \{x \in C^1[0,1] : x(0) = 0\}$$

$(Ax)(t) = x'(t)$. Mostremos que A é fechado.

Suponha que $\begin{cases} x_n \overset{E_1}{\to} x, & (1) \quad x_n \in D(A) \\ Ax_n \overset{E_2}{\to} y & (2) \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_0^t y(s)\,ds \overset{(2)}{=} \int_0^t \lim_{n\to\infty} x_n'(s)\,ds \overset{\text{Convergência uniforme}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_0^t x_n'(s)\,ds = \lim_{n\to\infty} (x_n(t) - x_n(0)) \overset{(1)}{=} x(t)$$

$\Rightarrow x(t) \in D(A)$ e $x'(t) = y(t)$ ou $(Ax)(t) = y(t)$.

b) $E_1 = E_2 = L^p(\mathbb{R})$, $p \geq 1$

Seja $m : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mensurável e limitado

$Ax = mx$, $D(A) = \{x \in L^p(\mathbb{R}) : mx \in L^p(\mathbb{R})\}$ domínio maximal

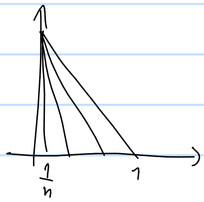
Mostremos que A é fechado. Seja $\begin{cases} x_n \to x, & x_n \in D(A) \\ Ax_n \to y \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_n \to x \text{ em } L^p(\mathbb{R}) \\ mx_n \to y \text{ em } L^p(\mathbb{R}) \end{cases} \Rightarrow \exists\, \{x_{n_k}\}$ t.q. $\begin{array}{l} x_{n_k} \to x \text{ q.t.p.} \\ m x_{n_k} \to y \text{ q.t.p.} \end{array}$

$\Rightarrow mx = y$ q.t.p.
e $x \in D(A)$

c) $E_1 = L^1[0,1]$, $E_2 = \mathbb{C}$, $D(A) = C[0,1]$, $Ax = x(0)$. Mostremos que A é não fechado.

Seja $x_n(t) = \begin{cases} 1 - nt, & 0 \leq t \leq 1/n \\ 0, & 1/n \leq t \leq 1 \end{cases}$



Temos $\|x_n\|_1 = \int_0^1 |x_n(t)|dt = \dfrac{1}{2n} \to 0 \Rightarrow x_n \to 0$

e $Ax_n = 1 \to 1$

$\Rightarrow \begin{cases} x_n \to 0 = x \\ Ax_n \to 1 = y \neq Ax = 0 \end{cases} \Rightarrow$ A é não fechado.

Obs 1) A é fechado $\Leftrightarrow$ A^{-1} é fechado.

De fato $G(A^{-1}) = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ A^{-1}y \end{pmatrix} : y \in R(A) \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} Ax \\ x \end{pmatrix} : x \in D(A) \right\}$ é fechado em $E_2 \times E_1$

$\Leftrightarrow$ $G(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ Ax \end{pmatrix} : x \in D(A) \right\}$ é fechado em $E_1 \times E_2$.

2) Se A for limitado e $D(A) = \overline{D(A)}$ $\Rightarrow$ A é fechado

De fato: $\begin{cases} x_n \to x, & x_n \in D(A) \\ Ax_n \to y \end{cases}$

Como $D(A) = \overline{D(A)}$, $x \in D(A)$. Do outro lado $Ax_n \to Ax$ $(\|Ax_n - Ax\| \leq \|A\| \|x_n - x\|)$

$\Rightarrow Ax = y$.

Teorema 2 (do gráfico fechado): Sejam E_1, E_2 EB e $A : D(A) \subseteq E_1 \to E_2$ fechado $\Rightarrow$ A é limitado sse $D(A) = \overline{D(A)}$.

Dem ($\Leftarrow$) veja AF (Análise Funcional)

($\Rightarrow$) Suponha que A é limitado. Seja $x_n \in D(A)$ t.q. $x_n \to x \in E_1$ $\Rightarrow$ $\|Ax_n - Ax_m\|_2 \leq \|A\| \|x_n - x_m\|_1$
$\Rightarrow$ $\{Ax_n\}$ é de Cauchy.

$\Rightarrow$ (como E_2 é EB) $\exists y = \lim_{n\to\infty} Ax_n$.

Temos $\begin{cases} x_n \to x, & x_n \in D(A) \\ Ax_n \to y \end{cases}$

Como A é fechado, $x \in D(A)$ e $Ax = y \Rightarrow D(A) = \overline{D(A)}$.

Ex 3: $E_1 = E_2 = C_c(\mathbb{R})$, $\|x\|_1 = \sup_{\mathbb{R}} |x(t)|$

suporte compacto

$D(A) = C_c(\mathbb{R})$

$(Ax)(t) = t\,x(t)$.

Seja $\begin{cases} x_n \to x & \text{em } C_c(\mathbb{R}) \\ Ax_n \to y \end{cases}$ (em ou ?)

$\begin{cases} x_n \to x \\ tx_n \to y \end{cases} \overset{\text{convergência pontual}}{\Rightarrow} y = tx$, $x \in D(A)$ (talvez Ax seja melhor notação que tx)

$\Rightarrow$ A é fechado.

Seja $\varphi_n \in C_c(\mathbb{R})$ t.q. $\|\varphi_n\| = 1$ e $\varphi_n(n) = 1 \Rightarrow \|A\varphi_n\| \geq |\underbrace{n\varphi_n(n)}_{(A\varphi_n)(n)}| = n \Rightarrow$ A é não limitado.

(problema é que $C_c(\mathbb{R})$ não é esp. de Banach)

Prop. 1: Sejam E_1, E_2, E_3 EN, $A: D(A) \subseteq E_1 \to E_2$ fechado, $T \in B(E_1, E_2)$, $S \in B(E_3, E_1)$

$\Rightarrow$ os seguintes ops. são fechados:

1) $B = A + T$, $D(B) = D(A) \cap \underset{\overset{\|}{E_1}}{D(T)} = D(A)$

2) $C = AS$, $D(C) = \{z \in E_3 : Sz \in D(A)\}$

Dem: 1) Seja $\begin{cases} x_n \xrightarrow{E_1} x, & x_n \in D(B) \\ Bx_n = Ax_n + Tx_n \xrightarrow{E_2} y \end{cases}$

Como $T \in B(E_1, E_2)$, $Tx = \lim Tx_n$ e A é fechado.

$\Rightarrow Ax = y - Tx$ e $x \in D(A)$

$\Rightarrow Bx = Ax + Tx = y$

2) Seja $\begin{cases} z_n \xrightarrow{E_3} z, & z_n \in D(C) \\ Cz_n \xrightarrow{E_2} y \end{cases}$

Como S é lim $\exists Sz = \lim Sz_n$. Como A é fechado e $Cz_n = ASz_n \to y$,

$Sz \in D(A)$ $\left(\begin{cases} Sz_n \to Sz \\ ASz_n \to y \end{cases} \right)$

e $Cz = ASz = y$.

Corolário: Sejam E EN e $A: D(A) \subseteq E \to E$, $\lambda \in \mathbb{C}$ $\Rightarrow$

1) A é fechado $\Leftrightarrow$ $\lambda I - A$ é fechado

2) Se $\lambda I - A$ é bijetor e $(\lambda I - A)^{-1} \in B(E)$ $\Rightarrow$ A é fechado.

Dem 1) $A = -((\lambda I - A) - \lambda I)$

2) Como $D((\lambda I - A)^{-1}) = E$ e $(\lambda I - A)^{-1}$ é lim., $(\lambda I - A)^{-1}$ é fechado $\Rightarrow \lambda I - A$ é fechado $\Rightarrow$ A é fechado.

10/03/20

Sejam E_1, E_2 E.N., $A: D(A) \subset E_1 \to E_2$

$$G(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ Ax \end{pmatrix} : x \in D(A) \right\} \subset E_1 \times E_2$$

$$\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| = \|x\|_1 + \|y\|_2$$

A é fechado $\Leftrightarrow G(A) = \bar{G}(A)$

A é fechado $\Leftrightarrow \left[\begin{cases} x_n \xrightarrow{E_1} x, & x_n \in D(A) \\ Ax_n \xrightarrow{E_2} y \end{cases} \Rightarrow x \in D(A) \text{ e } Ax = y \right]$

Ex 1:

a) $E_1 = E_2 = C_b(\mathbb{R}^2)$

$\|f\| = \sup_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)|$. Sejam $A_1 = \partial_x$, $A_2 = \partial_y$, onde

$D(A_1) = \{ f \in C_b(\mathbb{R}^2) : \exists\, \partial_x f \text{ e } \partial_x f \in C_b(\mathbb{R}^2) \}$

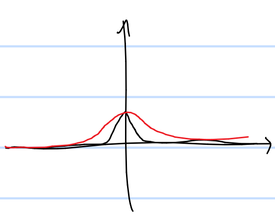
$D(A_2) =$ análogo.

Consideramos $B = A_1 + A_2$

$D(B) = D(A_1) \cap D(A_2) = C_b^1(\mathbb{R})$.

Observe que A_1 e A_2 são fechados. Mostremos que B não é fechado.

Dem Seja $\{\phi_n\} \subset C_b^1(\mathbb{R})$ t.q. $\sup_{\mathbb{R}} |\phi_n - \phi| \to 0$, $\phi \in C_b(\mathbb{R}) \setminus C_b^1(\mathbb{R})$



Define $f_n(x,y) = \phi_n(x-y)$
$f(x,y) = \phi(x-y)$

$$\Rightarrow \|f_n - f\| = \sup_{\mathbb{R}} |\phi_n - \phi| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

e $Bf_n(x,y) = \phi_n'(x-y) - \phi_n'(x-y) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_n \to f \\ Bf_n \to 0 \end{cases}, \quad f_n \in D(B)$$

mas $f \notin D(B) \Rightarrow B$ não é fechado.

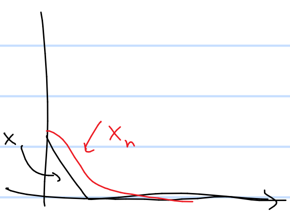
(Problema é que A_1 e A_2 são não limitados).

Ex2 $E = \mathcal{C}[0,1]$, $(Ax)(t) = x'(t)$, $D(A) = \mathcal{C}^1[0,1]$. Sejam $m(t) \in \mathcal{C}[0,1]$ t.q. $m(t) = 0$, $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$

e $S \in B(E)$ t.q. $Sx = \overset{\text{multiplicação}}{mx}$, $D(S) = \mathcal{C}[0,1]$. Mostremos que $C = SA$ com $D(C) = D(A)$ é não fechado.

Dem Sejam $x_n \in D(A)$ t.q. $x_n \to x \notin \mathcal{C}^1[0,1]$ e $x_n(t) = 0$, $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Temos $Cx_n = SAx_n = mx_n' = 0$, $t \in [0,1]$



$$\Rightarrow \begin{cases} x_n \to x \\ Cx_n \to 0 \end{cases}$$ mas $x \notin D(C) \Rightarrow C$ não é fechado.

O espectro

Def 1: Seja E um espaço de Banach. Dado $A : D(A) \subset E \to E \Rightarrow$

1) $\lambda \in \mathbb{C}$ é dito ponto regular de A se $(\lambda I - A)^{-1}$ for limitado em todo E.

$\rho(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A)^{-1}$ é limitado em $E \}$

Obs $\lambda I - A$ é bijetor.

2) O espectro de A é $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$

3) $\lambda \in \rho(A) \Rightarrow$ operador $R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1}$ é dito resolvente de A,

$R_\lambda(A) : E \to D(A)$, $R_\lambda(A) \in B(E)$

4) O espectro pontual de A é

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists x \in D(A)\setminus\{0\} \text{ t.q. } Ax = \lambda x\}$$

$$= \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A) \text{ não é injetor}\}$$

$\lambda \in \sigma_p(A)$ é dito autovalor de A.

Obs: 1) $\lambda \in \rho(A) \Rightarrow \underbrace{R_\lambda(A)}_{= (\lambda - A)^{-1}}$ é lim. em todo E $\Rightarrow R_\lambda(A)$ é fechado $\Rightarrow \lambda - A$ é fechado

$\Rightarrow A$ é fechado

Temos $\rho(A) \neq \emptyset \Rightarrow A$ é fechado $\Rightarrow$ [A não fechado $\Rightarrow \rho(A) = \emptyset$ e $\sigma(A) = \mathbb{C}$]

2) Seja $A : D(A) \subset E \to E$ fechado $\Rightarrow \rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A$ é bijetor$\}$

De fato $R_\lambda(A) : E \to E$ é fechado $\Rightarrow$ por Teorema do gráfico fechado $R_\lambda(A)$ é limitado.

Ex 3 $E = \mathcal{C}[0,1]$, $D(A) = \{x \in \mathcal{C}^1[0,1] : x(0) = 0\}$

$(Ax)(t) = x'(t)$. Mostremos que $\rho(A) = \mathbb{C}$. Lembre que A é fechado. Seja $\lambda \in \mathbb{C}$

$(\lambda - A)$ é injetor: Suponha que $\exists x_\lambda \in D(A)$ t.q. $Ax_\lambda = x'_\lambda = \lambda x_\lambda \Rightarrow x_\lambda = Ce^{\lambda t} \in D(A)$
$\Rightarrow C = 0 \Rightarrow \lambda - A$ é injetor.

$(\lambda - A)$ é sobrejetor: Seja $f \in E$. Procuraremos $x \in D(A)$ t.q. $(\lambda - A)x = f \Leftrightarrow \lambda x - x' = f$

$\Leftrightarrow x' - \lambda x = -f$ (1)

Como $x(t) = -\int_0^t e^{\lambda(t-s)} f(s)\,ds \in D(A)$

resolve (1), $\lambda - A$ é sobrejetor

$\Rightarrow \lambda \in \rho(A) \Rightarrow \rho(A) = \mathbb{C}$

<u>Obs</u> Para A não limitado $\sigma(A)$ pode ser vazio.

<u>Prop. 1</u>: Seja $A: D(A) \subset E \to E$ fechado e $\lambda_1, \lambda_2 \in \rho(A)$, $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow$

$$\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (R_{\lambda_2} - R_{\lambda_1}) = R_{\lambda_2} R_{\lambda_1} = R_{\lambda_1} R_{\lambda_2}$$

<u>Dem</u> Para $x \in E$ temos $x = (\lambda_1 - A) R_{\lambda_1} x$ ou $I = \lambda_1 R_{\lambda_1} - A R_{\lambda_1}$

$$\Rightarrow R_{\lambda_2} = (\lambda_1 R_{\lambda_1} - A R_{\lambda_1}) R_{\lambda_1} \quad \text{e}$$

$$R_{\lambda_1} = (\lambda_2 R_{\lambda_2} - A R_{\lambda_2})$$

Subtraindo, temos

$$R_{\lambda_2} - R_{\lambda_1} = (\lambda_1 - \lambda_2) R_{\lambda_1} R_{\lambda_2}$$

<u>Corolário 1</u>: Função $\rho(A) \ni \lambda \longmapsto R_\lambda(A) \in B(E)$ é contínua.

<u>Dem</u> $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \rho(A) \Rightarrow \|R_{\lambda_2} - R_{\lambda_1}\| \leq |\lambda_2 - \lambda_1| \underbrace{\|R_{\lambda_1}\| \|R_{\lambda_2}\|}_{\text{const.}}$

<u>Corolário 2</u>: Função $\rho(A) \ni \lambda \longmapsto R_\lambda(A) \in B(E)$ possui derivada $\forall \lambda \in \rho(A)$, ou seja, $R_\lambda(A)$ é analítica em $\rho(A)$.

<u>Dem</u>: $R_\lambda'(A) = \lim_{h \to 0} h^{-1} (R_{\lambda+h}(A) - R_\lambda(A)) = \lim_{h \to 0} h^{-1} R_{\lambda+h} R_\lambda (-h) = -R_\lambda^2$

(usamos continuidade e o fato que $\rho(A)$ é <u>aberto</u> que vamos provar mais tarde).

Teorema 1: Seja $A \in B(E)$ t.q. $\|A\| = q < 1 \Rightarrow (I-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$ em $B(E)$

Dem Seja $S_n = \sum_{k=0}^{n} A^k$ e $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N_0 \in \mathbb{N}$ t.q.

$$\|S_{n+p} - S_n\| \leq \|A^{n+1}\| + \dots + \|A^{n+p}\|$$
$$\leq \|A\|^{n+1} + \dots + \|A\|^{n+p} = q^{n+1} + \dots + q^{n+p} < \varepsilon, \quad n \geq N_0$$

$\Rightarrow \{S_n\}$ é de Cauchy. Já que E é EB $\Rightarrow B(E)$ é EB $\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} S_n = S \in B(E)$.

Falta mostrar que $S(I-A) = (I-A)S = I$ (S é inverso). Observando que

$\|(I-A)S_n - (I-A)S\| \leq \|I-A\| \|S_n - S\| \longrightarrow 0$

$\Rightarrow$ basta provar $(I-A)S_n \to I$. Temos $(I-A)S_n = (I-A)\sum_{k=0}^{n} A^k = I - A^{n+1}$

$\Rightarrow \|I - (I-A)S_n\| = \|A^{n+1}\| \longrightarrow 0 \Rightarrow (I-A) = I$

Analogamente $S_n(I-A) \longrightarrow I$.

Teorema 2: Seja $A \in B(E) \Rightarrow \sigma(A) \subseteq B_{\|A\|}(0)$.

Dem Mostremos que $\mathbb{C} \setminus B_{\|A\|}(0) \subseteq \rho(A)$. Seja $\lambda \in \mathbb{C}$ t.q. $|\lambda| > \|A\| \Rightarrow \lambda - A = \lambda\left(I - \frac{A}{\lambda}\right)$.

Como $\left\|\frac{A}{\lambda}\right\| < 1$, por T_1, obtemos $I - \frac{A}{\lambda}$ é inversível $\Rightarrow \lambda - A$ é inversível

$\Rightarrow \lambda \in \rho(A)$

Lema 1: Seja $A \in B(E) \Rightarrow \|R_\lambda(A)\| \xrightarrow{|\lambda|\to\infty} 0$.

Dem: Por T_2, para $|\lambda|$ suficientemente grande $\lambda \in \rho(A)$.

Temos $\|(\lambda - A)x\| \geq |\|\lambda x\| - \|Ax\|| \geq ||\lambda|\|x\| - \|A\|\|x\|| = \underbrace{(|\lambda| - \|A\|)}_{>0}\|x\|$

Seja $(\lambda - A)x = y$

$\Rightarrow \|g\| \geqslant (|\lambda| - \|A\|)\, \|R_\lambda(A) g\|$

$\Rightarrow \|R_\lambda(A) g\| \leqslant \dfrac{1}{|\lambda| - \|A\|} \|g\|$

$\Rightarrow \|R_\lambda(A)\| \leqslant \dfrac{1}{|\lambda| - \|A\|} \xrightarrow{|\lambda| \to \infty} 0$

<u>Teorema</u> 3: Seja $A \in B(E) \Rightarrow \sigma(A) \neq \emptyset$.

<u>Dem</u>: Suponha que $\sigma(A) = \emptyset \Rightarrow \rho(A) = \mathbb{C} \overset{\text{Cor 2}}{\Longrightarrow} R_\lambda(A)$ é analítica em $\mathbb{C}$.

Mostremos que $\sup\limits_{\lambda \in \mathbb{C}} \|R_\lambda(A)\| < \infty$. Sabemos que $R_\lambda(A)$ é contínua em $\rho(A) = \mathbb{C}$

$\Rightarrow \mathbb{C} \ni \lambda \mapsto \|R_\lambda\|$ é cont. $\Rightarrow$ por T. de Wierstrass $f(\lambda) = \|R_\lambda(A)\|$ é limitada em $\bar{B}_R(0)$,

onde R é suficientemente grande. Por Lema 1, $f(\lambda)$ é limitada em $\mathbb{C} \setminus \bar{B}_R(0)$.

Finalmente $\sup\limits_{\lambda \in \mathbb{C}} \|R_\lambda(A)\| = d < \infty$. Agora sejam $x \in E$, $f \in E^*$. Consideremos $F(\lambda) = f(R_\lambda x)$

$(F(\lambda) : \rho(A) \longrightarrow \mathbb{C})$

$\Rightarrow F(\lambda)$ é analítica em todo $\mathbb{C}$.

De outro lado $|F(\lambda)| \leqslant \|f\| \|R_\lambda x\| = \|f\| d$

$\xRightarrow{\text{por T. de Liouville}} F(\lambda) = \text{const.} = C$

Já que $\|R_\lambda\| \xrightarrow{|\lambda| \to \infty} 0$, $C = 0$.

Logo, $\forall x \in E$, $\forall f \in E^*$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$: $f(R_\lambda x) = 0$

$\Rightarrow R_\lambda x = 0 \quad \forall x \in E \Rightarrow R_\lambda = 0$ (absurdo) $\Rightarrow \sigma(A) \neq \emptyset$.

<u>Obs</u> Este resultado é falso para A não lim!

13/03/20

Seja E EB, $A: D(A) \subset E \to E$ fechado

$$\rho(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \text{ é bijetor} \}$$
$$= \{ \lambda \in \mathbb{C} : (\lambda - A)^{-1} \text{ é limitado em } E \}$$

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$$

$$R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1} : E \to D(A), \ \lambda \in \rho(A)$$

Teorema 1 Seja $A: D(A) \subset E \to E$ fechado. Se $\lambda_0 \in \rho(A)$ e $|\lambda - \lambda_0| < \dfrac{1}{\|R_{\lambda_0}(A)\|}$

$$\Rightarrow \lambda \in \rho(A)$$

e $R_\lambda(A) = R_{\lambda_0}(A) + (\lambda_0 - \lambda) R_{\lambda_0}(A)^2 + \dots$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n R_{\lambda_0}(A)^{n+1} \quad \text{em } B(E)$$

Dem Sejam $S_n = \sum_{k=0}^{n} (\lambda_0 - \lambda)^k R_{\lambda_0}(A)^{k+1}$ e $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N_0 \in \mathbb{N}$ t.q.

$$\|S_{n+p} - S_n\| \leq \|(\lambda_0 - \lambda)^{n+1} R_{\lambda_0}(A)^{n+2}\| + \dots + \|(\lambda_0 - \lambda)^{n+p} R_{\lambda_0}(A)^{n+p+1}\|$$

$$\leq \|R_{\lambda_0}(A)\| \, (\underset{1}{\underset{\wedge}{\delta}}^{n+1} + \dots + \delta^{n+p}) < \underset{n \geq N_0}{\varepsilon} \qquad (\delta = |\lambda_0 - \lambda| \, \|R_{\lambda_0}(A)\|)$$

$\Rightarrow \{S_n\}$ é de Cauchy $\Rightarrow \exists \lim_n S_n = S \in B(E)$

Devemos mostrar que $S = R_\lambda(A)$

- Temos $((\lambda - \lambda_0) R_{\lambda_0} + I) S = -\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^{n+1} R_{\lambda_0}^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n R_{\lambda_0}^{n+1} = R_{\lambda_0}$

Observando que $(\lambda_0 - A)((\lambda - \lambda_0) R_{\lambda_0} + I) = (\lambda - \lambda_0) \underbrace{(\lambda_0 - A) R_{\lambda_0}}_{I} + \lambda_0 - A = (\lambda - \lambda_0) I + \lambda_0 I - A$

$$= \underline{\lambda - A}$$

Obtemos $(\lambda - A) S = (\lambda_0 - A) \underbrace{((\lambda_0 - \lambda) R_{\lambda_0} + I) S}_{R_{\lambda_0}} = (\lambda_0 - A) R_{\lambda_0} = I \Rightarrow \lambda - A$ é sobrejetor

• Analogamente $S((\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}+I)=R_{\lambda_0}$

e $S(\lambda-A) = S\underbrace{((\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}+I)(\lambda_0-A)}_{\lambda-A} = R_{\lambda_0}(\lambda_0-A) = I_{D(A)} \Rightarrow \lambda-A$ é injetor

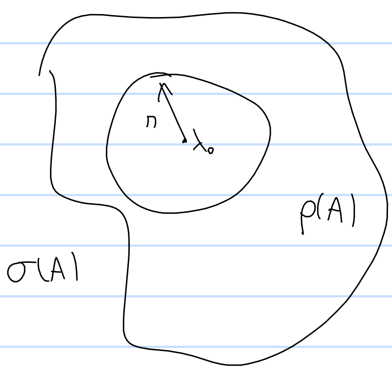
$\Rightarrow S = R_\lambda(A)$

<u>Corolário 1</u> $\lambda_0 \in \rho(A) \Rightarrow B_{\frac{1}{\|R_{\lambda_0}(A)\|}}(\lambda_0) \subset \rho(A) \Rightarrow \rho(A)$ é <u>aberto</u> $\Rightarrow \sigma(A)$ é <u>fechado</u>.

<u>Corolário 2</u>: $\|R_{\lambda_0}(A)\| \geqslant \frac{1}{d(\lambda_0)}$, $d(\lambda_0) = \text{dist}(\lambda_0, \sigma(A)) = \inf\limits_{z \in C(A)} |\lambda_0 - z|$

$\Rightarrow \|R_{\lambda_0}(A)\| \longrightarrow 0$ quando $d(\lambda_0) \longrightarrow 0$

<u>Dem</u> Temos $B_{\underbrace{\frac{1}{\|R_{\lambda_0}(A)\|}}_{r}}(\lambda_0) \subset \rho(A)$



$\Rightarrow d(\lambda_0) \geqslant \frac{1}{\|R_{\lambda_0}(A)\|}$

$\Rightarrow \|R_{\lambda_0}(A)\| \geqslant \frac{1}{d(\lambda_0)}$

<u>Ex 1</u> Sejam $E = C[0,1]$, $m(t) \in C[0,1]$

$(Ax)(t) = m(t)x(t)$, $D(A) = E \Rightarrow$

A é limitado, fechado e $\sigma(A) = m([0,1])$

<u>Dem</u> • $\|Ax\| \leqslant \|m\|\|x\| \Rightarrow \|A\| \leqslant \|m\|$

Se $x = 1 \Rightarrow Ax = m \Rightarrow \|A\| = \|m\|$

$\Rightarrow A$ é limitado $\Rightarrow$ fechado (já que $D(A) = E$)

• a) Mostremos que $\sigma(A) \subseteq m([0,1])$ ou $\mathbb{C} \setminus \sigma(A) \supseteq \mathbb{C} \setminus m([0,1])$

Seja $\lambda \in \mathbb{C} \setminus m([0,1])$.

<u>$\lambda - A$ é injetor</u>: Suponha que $\exists x \in D(A)$ t.q. $Ax = mx = \lambda x \Rightarrow (m(t) - \lambda)x(t) \equiv 0$

$$\Rightarrow \forall t \in [0,1] \quad \left[\begin{array}{l} m(t) - \lambda = 0 \quad \text{não pode acontecer} \\ x(t) = 0 \end{array} \right.$$

$\Rightarrow x(t) \equiv 0 \Rightarrow \lambda - A$ é injetor

<u>$\lambda - A$ é sobrejetor</u>: Seja $f \in E \Rightarrow$ para $x(t) = \underbrace{\dfrac{1}{\lambda - m(t)}}_{\in C[0,1] \text{ como } \lambda \notin m([0,1])} f(t)$ temos $(\lambda - A)x(t) = f(t)$

$\Rightarrow \lambda \in \rho(A)$.

b) Mostremos que $m([0,1]) \subseteq \sigma(A)$. Seja $\lambda \in m([0,1])$. Mostremos que $R((\lambda - A)) \neq E$.
De fato, suponha que $x(t) \equiv 1 \in R((\lambda - A))$.

$\Rightarrow \exists x \in D(A)$ t.q. $(\lambda - A)x = 1$ ou

$(\lambda - m)x = 1 \Rightarrow x(t) = \dfrac{1}{\lambda - m(t)} \notin D(A)$ (absurdo)

<u>Ex 2</u>: $A: E \to E$, $E \in \{c_0, \ell^p, 1 \leq p \leq \infty\}$

$Ax = A(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$

$\sigma(A) = \overline{B}_1(0)$

Além disso, $\sigma_p(A) = B_1(0)$ se $E \neq \ell^\infty$ e $\sigma_p(A) = \overline{B}_1(0)$ se $E = \ell^\infty$

<u>Dem</u> É fácil ver que $\|A\| = 1 \Rightarrow \sigma(A) \subseteq \overline{B}_1(0)$

• Seja $\lambda \in B_1(0)$ $(|\lambda| < 1) \Rightarrow x_\lambda = (\lambda^n)_1^\infty \in E$ e $Ax_\lambda = \lambda x_\lambda$

$\Rightarrow B_1(0) \subseteq \sigma_p(A) \subseteq \sigma(A)$

(Considere $\lambda = 0$ separadamente)

$\Rightarrow \bar{B}_1(0) \subseteq \sigma(A) \Rightarrow \sigma(A) = \bar{B}_1(0)$

• Seja λ t.q. $|\lambda| = 1$. Suponha que $\exists x_\lambda \in E$ t.q. $Ax_\lambda = \lambda x_\lambda \Rightarrow x_{n+1} = \lambda x_n$

$\Rightarrow x_\lambda = (\lambda^{n-1} x_1)_1^\infty$

$x_\lambda \in E$ sse $E = \ell^\infty$

$\Rightarrow \sigma_p(A) = \sigma(A) = \bar{B}_1(0)$ para $E = \ell^\infty$.

Partes diferentes do espectro

Def 1 Sejam E EB e $A : D(A) \subset E \longrightarrow E \Rightarrow$

1) espectro pontual aproximado de A é

$\sigma_{ap}(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \exists \{x_n\} \subset D(A) \text{ t.q. } \|x_n\| = 1 \text{ e } \lambda x_n - Ax_n \longrightarrow 0 \}$

$\lambda \in \sigma_{ap}(A)$ é dito autovalor aproximado e x_n são autovetores aproximados.

2) espectro residual de A é

$\sigma_r(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \overline{R((\lambda - A))} \neq E \}$

Obs 1) $\sigma_p \subseteq \sigma_{ap}(A)$. De fato, seja $\lambda \in \sigma_p(A)$ com autovetor x

para $x_n = \dfrac{x}{\|x\|}$ temos $\lambda x_n - Ax_n = 0 \longrightarrow 0$

2) Se para $\lambda \in \mathbb{C}$ existir $\{x_n\} \in D(A)$ t.q. $\|x_n\| > \delta > 0$ $\forall n$ t.q. $\lambda x_n - Ax_n \rightarrow 0$

$\Rightarrow \lambda \in \sigma_{ap}(A)$.

Prop 1 Seja $A : D(A) \subset E \to E$ fechado

$\Rightarrow$

1) $\sigma_{ap}(A) = \sigma_p(A) \cup \underbrace{\{ \lambda \in \mathbb{C} : R((\lambda - A)) \neq \overline{R((\lambda-A))} \}}_{M}$

2) $\sigma(A) = \sigma_{ap}(A) \cup \sigma_r(A)$

3) Suponha que A é lim $\Rightarrow \partial\sigma(A) \subseteq \sigma_{ap}(A)$

Dem 1) • Mostremos $\sigma_{ap}(A) \supseteq \sigma_p(A) \cup M$ ou $\mathbb{C} \setminus \sigma_{ap}(A) \subseteq \mathbb{C} \setminus (\sigma_p(A) \cup M)$.

Seja $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{ap}(A) \Rightarrow \lambda \notin \sigma_p(A)$ e $\exists C > 0$ t.q. $\|(\lambda - A)x\| \geq C\|x\| \quad \forall x \in D(A)$

Mostremos que $R((\lambda - A))$ é fechada.

Seja $\{y_n\} \subset R((\lambda-A))$ t.q. $y_n \to y$

ou $y_n = \lambda x_n - Ax_n \to y$, $\{x_n\} \subset D(A)$

$\underset{(1)}{\Rightarrow} \frac{1}{C} \|y_n - y_m\| \geq \|x_n - x_m\| \Rightarrow \{x_n\}$ é de Cauchy $\Rightarrow \exists \lim x_n = x$

$\Rightarrow Ax_n = \lambda x_n - y_n \longrightarrow \lambda x - y$ ou

$\begin{cases} x_n \longrightarrow x \\ Ax_n \to Ax + y \end{cases} \Rightarrow$ já que A é fechado,

$x \in D(A)$ e $Ax = \lambda x - y \Rightarrow$

$y \in R((\lambda - A)) \Rightarrow R((\lambda-A))$ é fechado $\Rightarrow \lambda \notin M \Rightarrow \lambda \in \mathbb{C} \setminus (\sigma_p(A) \cup M)$.

• Mostremos $\sigma_{ap}(A) \subseteq \sigma_p(A) \cup M$ ou $\mathbb{C} \setminus \sigma_{ap}(A) \supseteq \mathbb{C} \setminus (\sigma_p(A) \cup M)$

Seja $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\sigma_p(A) \cup M) \Rightarrow \lambda \notin \sigma_p(A)$ e $R((\lambda - A))$ é fechado.

2) $\sigma(A) = \sigma_{ap}(A) \cup \sigma_n(A)$

3) Suponha que A é lim $\Longrightarrow \partial\sigma(A) \subseteq \sigma_{ap}(A)$

$\Longrightarrow (\lambda - A)^{-1}$ existe em $R(\lambda - A)$ é fechado

$\Rightarrow$ por T. do gráfico fechado $(\lambda - A)^{-1}: \underbrace{R((\lambda - A))}_{EB} \longrightarrow E$ é limitado

operador limitado

$\|x\| = \|(\lambda - A)^{-1}(\lambda - A)x\| \leqslant C\|(\lambda - A)x\| \quad \forall x \in D(A)$

$\Longrightarrow \frac{1}{C}\|x\| \leqslant \|(\lambda - A)x\|$

$\Longrightarrow \lambda \notin \sigma_{ap}(A).$

2) $\sigma(A) = \sigma_{ap}(A) \cup \sigma_n(A)$

É obvio que $\sigma(A) \supseteq \sigma_{ap}(A) \cup \sigma_n(A).$

Mostremos $\subseteq$

tem a ver com não ser valor regular

$\lambda \in \sigma(A) \Longrightarrow$

- ou $(\lambda - A)^{-1}$ não existe $\Rightarrow \lambda \in \sigma_p(A)$
- ou $(\lambda - A)^{-1}$ existe algebricamente e
- ou $R((\lambda - A))$ é fechada e $R((\lambda - A)) \neq E \Rightarrow \lambda \in \sigma_n(A)$
- ou $R((\lambda - A)) \neq \overline{R((\lambda - A))}$ não é fechada $\Rightarrow \lambda \in M \Rightarrow \lambda \in \sigma_{ap}(A)$

3) A lim $\Rightarrow \partial\sigma(A) \subseteq \sigma_{ap}(A)$

Seja $\lambda \in \partial\sigma(A) \Rightarrow \exists\{\lambda_n\} \in \rho(A)$ t.q. $\lambda_n \to \lambda \overset{\text{Cor 2}}{\Longrightarrow} \|R_{\lambda_n}(A)\| \xrightarrow{\lambda_n \to \lambda} \infty$

Seja $\{y_n\} \subset E$ t.q. $\|y_n\| = 1$ e $\underbrace{\|R_{\lambda_n}(A)y\|}_{a_n} \longrightarrow \infty$

Define $x_n = \frac{1}{a_n} R_{\lambda_n}(A)y_n \in D(A) \Rightarrow \|x_n\| = 1$ e $\lambda x_n - Ax_n = \underbrace{(\lambda - \lambda_n)}_{\to 0}x_n + (\lambda_n - A)x_n$

$$= (\lambda - \lambda_n) x_n + (\lambda_n - A) \frac{1}{a_n} (\lambda_n - A)^{-1} y_n = \underbrace{(\lambda - \lambda_n)}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \overset{\lim}{\widehat{x_n}} + \frac{1}{\underbrace{a_n}_{\substack{\downarrow \\ 0}}} \overset{\lim}{\widehat{y_n}} \longrightarrow 0$$

$\{x_n\}$ são autoretores aproximados $\Longrightarrow$ $x \in \sigma_{ap}(A)$.